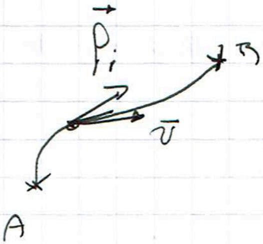
# LOIS DE CONSERVATION

## Théorème énergie cinétique

$$\Delta E_{cin} = \sum_i W_{A \to B}^{\vec{F}_i} (\vec{f}_i)$$




forces conservative $\quad \vec{F}_{conserv} = -\vec{\text{grad}}\, E_p$

$$\Delta E_{cin} = \sum_i \int_A^B \vec{f}_i \, d\vec{P} = -\sum_i \int_A^B \vec{\text{grad}}\,(E_p^i)\, d\vec{P}$$

$$= -\sum_i \int_A^B dE_p^i$$

$$= -\sum_i \Delta E_p^i$$

$$E_{cin}(B) - E_{cin}(A) = -E_{pot}(B) + E_{pot}(A)$$

$$\Rightarrow \quad E_{cin}(B) + E_{pot}(B) = E_{cin}(A) + E_{pot}(A)$$

$$\Rightarrow \quad E_{mé} = E_{cin} + E_{pot} = cst$$

---

Pendule

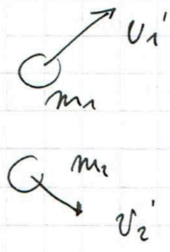
---

## Conservation de $\vec{p}$

PFD $\qquad \dfrac{d}{dt}\vec{p} = \sum \vec{F}_{ex} = 0 \qquad$ isolé

$$\Rightarrow \quad \vec{P} = cst$$

Choc $\qquad$ avant $\qquad\qquad$ après


conservation $\vec{p}$ et $E_{cin}$

6 variables
4 équations

$$\begin{cases} ① \quad m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad \rightarrow \text{plan} \\ ② \quad \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{\,2} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^{\,2} \end{cases}$$

si $m_1 = m_2$

$①^2 \qquad v_1^2 = \vec{v}_1'^{\,2} + \vec{v}_2'^{\,2} + 2\, \vec{v}_1 \vec{v}_2$

comme ② $\quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 \vec{v}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

Si on connaît $\vec{v}_1$ et $\theta_1$, on connaît tout.

Si $m_1 \neq m_2$. ~~Dans~~ $\cancel{R^*}$ ; ~~référentiel~~ ~~barycentrique~~ :

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

et $$P = (m_1 + m_2) \, \vec{v}(\vec{G}) \qquad G : \text{barycentre}$$

ie $$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{P}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_G' = \frac{m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'}{m_1 + m_2} = \frac{P}{m_1 + m_1}$$

$\vec{v}_G$ est conservé

---

## Conservation du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique nous dit

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_A(\cancel{S})_{\text{particule}} = \sum \vec{M}_A (\vec{f}^{ext})$$

$$= \sum \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_i^{ext}$$

Spin ; $\vec{L}$ en quantique.

Si la force est centrale $\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L}_A(S) = 0$

$\Rightarrow \vec{L}_A(S) = cst$

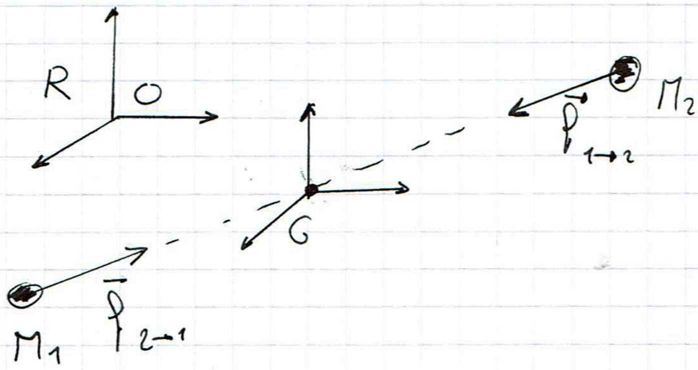
$\Rightarrow$ mvt plan car $\vec{OM} \perp L_0(M)$

$\Rightarrow$ coordonnées polaires : $L = r^2 \dot{\theta} = cst = C$

cst des Aires

et vitesse aréolaire $\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$

# Problème à 2 corps




$$\vec{f}_{2\to1} = G \frac{m_1 \cdot m_2}{\overline{M_1M_2}^3} \overrightarrow{M_1M}$$

$$\vec{f}_{1\to2} = - \vec{f}_{2\to1}$$

Soit $$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM_1} + m_2 \vec{OM_2}}{m_1 + m_2}$$

on a $$\vec{v}_G = \frac{d}{dt}\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

système isolé $$= \frac{\vec{P}_1 + \vec{P}_2}{m_1 + m_2} = cst$$

$\Rightarrow$ $\vec{v}_G = cst$ : mouvement uniforme de G

$\Rightarrow$ $R^*$ est un référentiel Galiléen

$\Rightarrow$ dans $R^*$
$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2}{dt^2} \vec{GM_1} = \vec{f}_{2\to1} \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} \vec{GM_2} = \vec{f}_{1\to2} = -\vec{f}_{2\to1} \end{cases}$$

on divise par $m_1$ et $m_2$
et on soustrait
$$\Rightarrow \ddot{\vec{GM_1}} - \ddot{\vec{GM_2}} = \frac{\vec{f}_{2\to1}}{m_1} - \frac{\vec{f}_{1\to2}}{m_2}$$

$$\Rightarrow \ddot{\overrightarrow{M_1M_2}} = \vec{f}_{2\to1}\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right) = \vec{f}_{2\to1}\left(\frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2}\right)$$

i.e. $$\vec{f} = \mu \ddot{\vec{r}}$$

avec
$$\begin{cases} \vec{f} = \vec{f}_{2\to1} \\ \mu = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad \text{masse réduite} \\ r = \overrightarrow{M_1M_2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ équation de Kepler avec masse réduite

On a un mouvement relatif ~~et~~ plus un uniforme

C'est un mouvement avec une force centrale

$$\Rightarrow \quad r^2 \dot{\theta} = C_{st} \quad \longrightarrow \quad \text{Kepler pour } \mu$$

Dans le référentiel $R^*$, on ~~t~~ a la relation

$$\begin{cases} m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = 0 \\ \text{et} \quad \overrightarrow{GM_1} - \overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GM_1} = \vec{r} + \overrightarrow{GM_2} = \vec{r} - \frac{m_1}{m_2} \overrightarrow{GM_1}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GM_1} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = \vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GM_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r}$$

Homothétie

$$\text{et} \quad \overrightarrow{GM_2} = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$\Rightarrow$ On résout $\vec{r}(t)$ et on passe le mouvement relatif de $M_1(t)$ et $M_2(t)$

Dans le cas de 2 ~~pt~~ étoiles :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}(t) = - G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}(t) = - G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r}$$

On retrouve le problème classique d'une force centrale en remplaçant $m_1 \rightarrow m_1 + m_2$

$$\vec{r} = \frac{P}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = \dfrac{C^2}{G(m_1 + m_2)} \\ e \geq 0 \end{cases}$$

Le reste du développement en FEMTO