23 TRAITEMENT DU SIGNAL

Toute fonction périodique peut s'écrire sous la forme d'une série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

avec $\forall n \geq 0$ $\quad a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

a_n uniquement si $f(t)$ est pair

b_n uniquement si $f(t)$ est impair

$a_0 = \langle f(t) \rangle$ $\quad n = 1$ est la fondamentale

On peut aussi écrire $f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega n t + \varphi_n)$

La valeur efficace d'un signal périodique est

$$F_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}$$

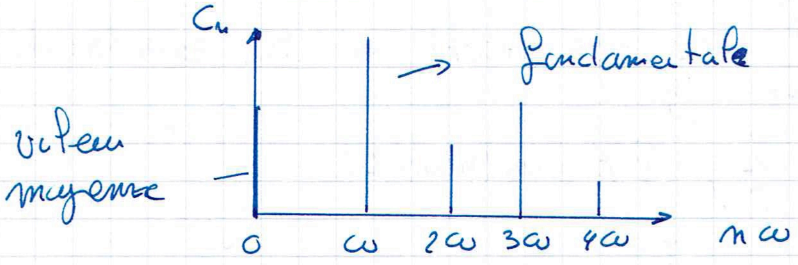
Le théorème de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}\right)$$

donc $F_{eff}^2 = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{2}$

La puissance moyenne du signal est la somme des puissances transportée par chaque harmonique

Le spectre est le graphe donnant a_n et b_n en fonction de $n\omega$ ou directement $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$



Slides avec exemples.

Pour les signaux non périodique, on peut généraliser la série de Fourier en transformée :

$$\tilde{S}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-2i\pi\nu t)\, dt$$

Filtres

- caractéristiques invariantes dans le temps
- respecte le principe de superposition.

$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{filtre}} \longrightarrow s(t)$

$$\alpha_0\, e(t) + \alpha_1 \frac{d\, e(t)}{dt} + \dots + \alpha_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} = \beta_0\, s(t) + \beta_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + \beta_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}$$

si $e(t)$ est sinusoïdale, $s(t)$ sera sinusoïdale

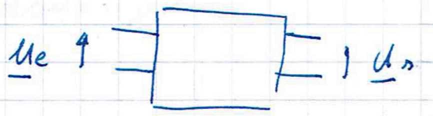
soit $\underline{e}(t) = \underline{E}\, e^{j\omega t}$ et $\underline{s}(t) = \underline{S}\, e^{j\omega t}$

La fct de transfert $\underline{H}(j\omega) \overset{\text{def}}{=} \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$

détermine entièrement le filtre

L'ordre du filtre est l'ordre du polynôme $\underline{E}(j\omega)$

Dans le cas d'un quadripôle



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s(t)}{\underline{u}_e(t)} \quad (i_s = 0)$$

Le gain est défini par $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{S_{RMS}}{E_{RMS}}$

et un déphasage $\phi = \operatorname{Arg}(\underline{H}(j\omega))$

On représente $\underline{H}(j\omega)$ par les diagrammes de Bode

$20 \log G(\omega)$ [dB] vs ω [Hz]
dans un diagramme lin / log

et ϕ [°] vs ω [Hz]
dans un diagramme lin / log

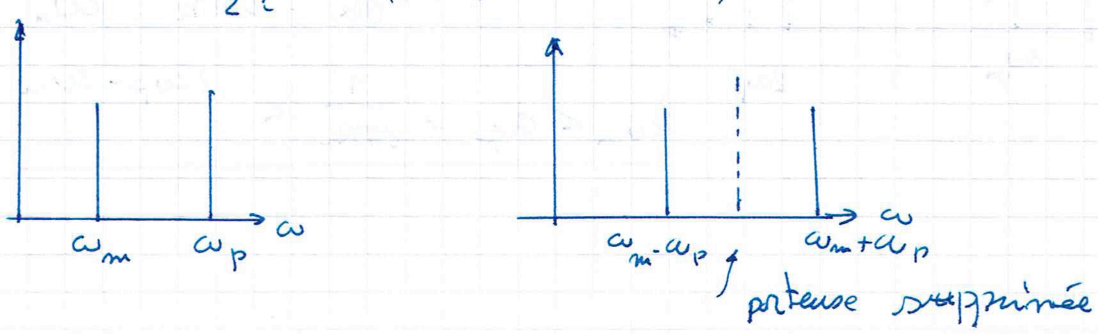
<u>Slide sur filtres linéaires</u>

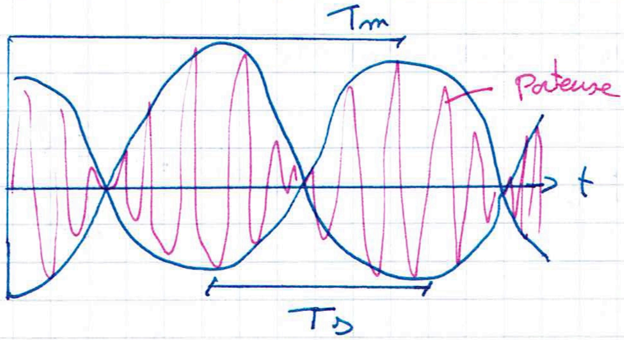
Introduire la fréquence de coupure :
Gain -3 dB , puissance divisée par 2
(amplitude divisée par $\sqrt{2}$)

<u>Filtre non linéaire</u>

Ex : <u>multiplieur</u>

$$s(t) = U_0 \cos(\omega_p t) \cdot \cos(\omega_m t + \varphi)$$
$$= \frac{U_0}{2}\left[\cos((\omega_p + \omega_m)t + \varphi) + \cos((\omega_p - \omega_m)t - \varphi)\right]$$





Enveloppe $\pm k\cos(\omega_m t + \varphi)$

ω_m : modulante

$T_m = 2 \cdot T_s$

période modulante = 2 · période signal

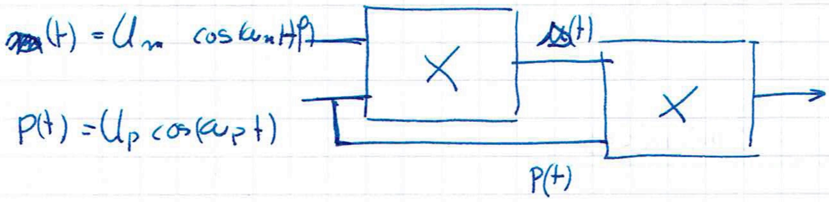
Signal modulé : basse fréquences ont glissé en haute fréquence

Multiplescage possible

son $40\ Hz \rightarrow 20\ kHz \rightarrow$ MW ~ $1\ MHz$

Pas de démodulation possible avec un détecteur de crête.

Démodulation synchrone

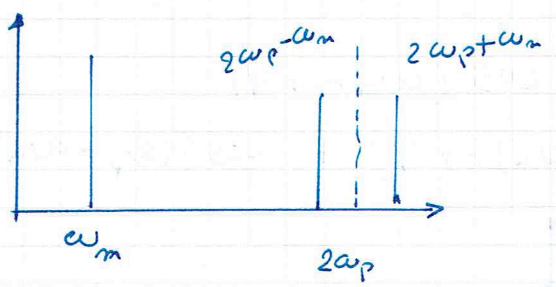


$$u_s(t) = \frac{p(t)\cdot s(t)}{k}$$

$$u_s(t) = \frac{U_1}{2}\Big(\cos((\omega_p+\omega_m)t+\varphi) + \cos((\omega_p-\omega_m)t-\varphi)\Big)\cdot\cos(\omega_p t)$$

$$= \frac{U_1}{4}\Big[\cos((2\omega_p+\omega_m)t+\varphi) + \cos(\omega_m t+\varphi) + \cos((2\omega_p-\omega_m)t-\varphi) + \cos(-\omega_m t-\varphi)$$

$$= \frac{U_1}{4}\Big[\cos((2\omega_p+\omega_m)t+\varphi) + \cos((2\omega_p-\omega_m)t+\varphi) + 2\cos(\omega_m t+\varphi)\Big]$$



avec un filtre passe-bas on isole ω_m

$$\omega_m < \omega_c = \frac{1}{2\pi RC} < 2\omega_p - \omega_m$$