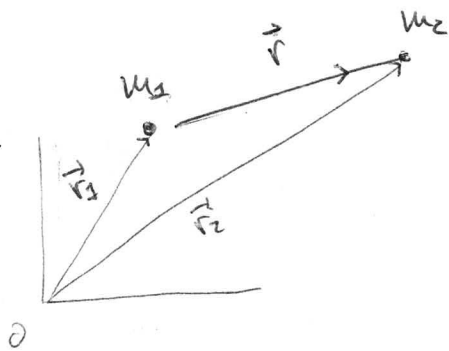


Loi GRAVITATION UNIVERSELLE (1687)

(formule par Newton → expliquer orbites des planètes)



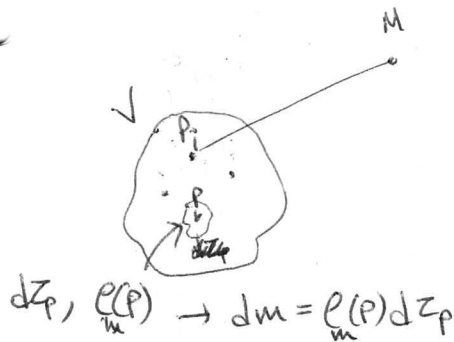
$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = - \frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$$

masse pesante = masse inerte des PFD

Principe de superposition pour le champ gravitationnelle:

$$\vec{G}(M) = \sum_{i=1}^N - \frac{G m_i \vec{P_i M}}{|P_i M|^3}$$



$$\vec{G}(M) = \iiint_V - G \frac{\rho(P) \vec{P M}}{P M^3} dV_p$$

Theoreme de Gauss en gravitation

$$\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_e(P) \frac{\vec{P M}}{P M^3} dV_p$$

$$\vec{E} \rightarrow \vec{G}$$

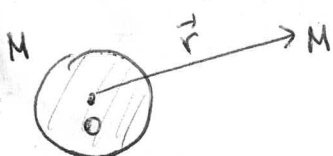
$$\rho_e \rightarrow \rho_m$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow -G$$

Theoreme Gauss gravitation.

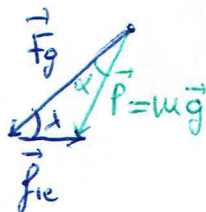
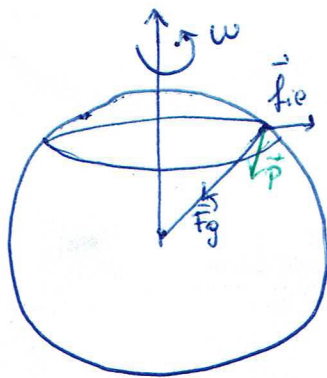
$$\oint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow \oint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int} \quad \left[\frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow -4\pi G \right]$$

SYMMETRIE SPHERIQUE



$$\vec{G}(M) = - G M_{ext} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

CHAMP PESANTEUR TERRESTRE



$$\frac{\sin \lambda}{f_{ie}} = \frac{\sin \lambda}{mg}$$

$$m g(\lambda) = \left[\left(|F_g| \cos \lambda - m \omega^2 R_T \cos \lambda \right)^2 + \left(F_g \sin \lambda \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

MANIP MESURE $\vec{g}$

$$E_p = \frac{-\alpha}{r} = -\frac{m M G}{R_T} \left(\frac{1}{1+h/R_T} \right) \approx -\frac{m M G}{R_T} + \frac{m M G}{R_T^2} h$$

LOIS DE KEPLERE (entre 1608 et 1618, la troisième)

- 1) Chaque planète décrit, dans le sens direct, une trajectoire elliptique dont le soleil est un de foyers (1605)

Conservation $\vec{L}_0 \rightarrow$ mouvement plan

force $\propto \frac{1}{r^2} \rightarrow$ coniques (si $E_m < 0 \Rightarrow$ ellipse/cercle)

- 2) l'air balayée par le rayon soleil-planète est proportionnelle au temps mis pour le parcourir $\rightarrow$ conservation $\vec{L}_0$

- 3) T^2 de révolution sidérale $\propto$ cube du demi-grand axe $\rightarrow$ force $\propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow$ CONIQUES

T^2/a^3 est le même pour toutes les planètes ^{gravitent autour du Soleil}

■ Mouvement d'un corp (pain materiel M) soumis à grav.

$$\vec{f}(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$$



force centrale, conservative, independant du temps

I) force centrale $\rightarrow$ conservation moment cinétique

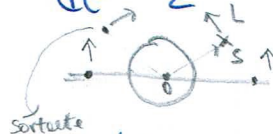
$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{f}(r) = \vec{0} \rightarrow \text{MOUVEMENT PLAN}$$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge (\dot{\vec{r}} + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) m = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \text{const} m \ell \vec{e}_z$$

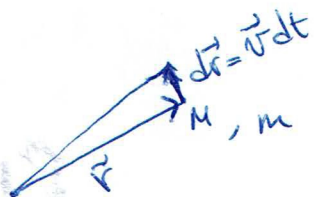
Loi DES AIRES: $d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} dt = \frac{1}{2} \ell \vec{e}_z$

$$\Rightarrow v = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \ell$$

SATELLITE GEOSTATIONNAIRE : Equateur



$$\vec{L} = \vec{OS} \wedge \vec{v}$$

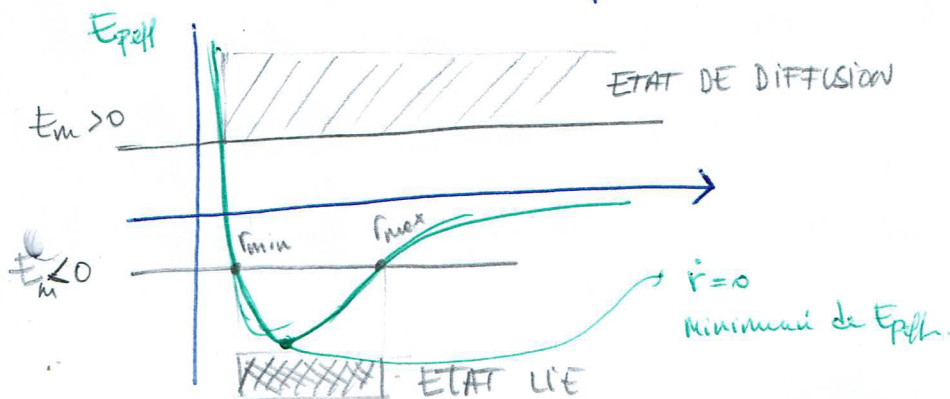


II) FORCE CONSERVATIVE $\rightarrow$ conservation energie mécanique

$$\vec{f} = -\text{grad } E_p(r) \quad \text{avec } E_p(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

fonction croissant de la distance car $\vec{f}$ est attractive

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{\ell^2}{r^2} + E_p(r) \quad , \quad E_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$$



III) Force NEWTONNIENNE, $f \propto \frac{1}{r^2}$

■ Conservation Vecteur Runge-Lenz:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{mr^2} \vec{e}_r \quad \text{pour le PFD}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{L}_0) = \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{L}_0 = -\frac{\alpha}{mr^2} \vec{e}_r \wedge mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta = +\alpha \dot{\theta} \vec{e}_\phi = +\alpha \frac{d}{dt} \vec{e}_r$$

$$\vec{A} = \left(\frac{\vec{r} \wedge \vec{L}_0}{\alpha} - \vec{e}_r \right) = \text{cte}$$

$$= \frac{(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \wedge m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta}{\alpha} - \vec{e}_r = \vec{e}_r \left(\frac{l_m^2}{r \alpha} - 1 \right) - \frac{m r}{\alpha} \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

■ Equation des coniques:

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = r \|\vec{A}\| \cos \theta = \frac{l_m^2}{\alpha} - r \Rightarrow$$

$$r = \frac{\frac{l_m^2}{\alpha}}{1 + \|\vec{A}\| \cos \theta}$$

$\downarrow$
 e

$$p = \frac{l_m^2}{\alpha}$$

$$e = \|\vec{A}\| \Rightarrow (e^2 - 1) = \frac{2l_m^2}{\alpha^2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2} \frac{l_m^2}{r^2} \right)}_{E_m}$$

$e < 1 \Rightarrow E_m < 0 \rightarrow$ trajectoire elliptique

$e = 1 \Rightarrow E_m = 0 \rightarrow$ " " parabolique

$e > 1 \Rightarrow E_m > 0 \rightarrow$ " " hyperbolique

III) - 3ème loi DE KEPLER

• Vitesse angulaire $\omega(t) = \frac{1}{2} \ell t + cte$ $\pi a b = \frac{\ell T}{2}$

$$\pi^2 a^2 b^2 = \frac{\ell^2 T^2}{4}$$

• Equations conique $2a = \frac{2p}{1-e^2}$, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$$\Rightarrow b^2 = pa \quad , \quad p = \frac{\ell^2}{aM}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0}$$

le rapport ne depend que de la masse du point attracteur

Orbite circulaire : PFD : $m\omega^2 r - \frac{mGM}{r} = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$

$$E_p = -2E_k$$

• Première vitesse cosmique : $v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{D}}$ $D = R_T + h$ - $v_1 \approx 7,9 \text{ km/s}$

"vitesse de satellisation minimal autour de la terre"

• Deuxième vitesse cosmique :

"vitesse de libération"

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \rightarrow E_m = 0$$

↓
11,2 km/s



• "Rayon de Schwarzschild
associe à la masse de l'objet"

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Pour trou noir de Schwarzschild

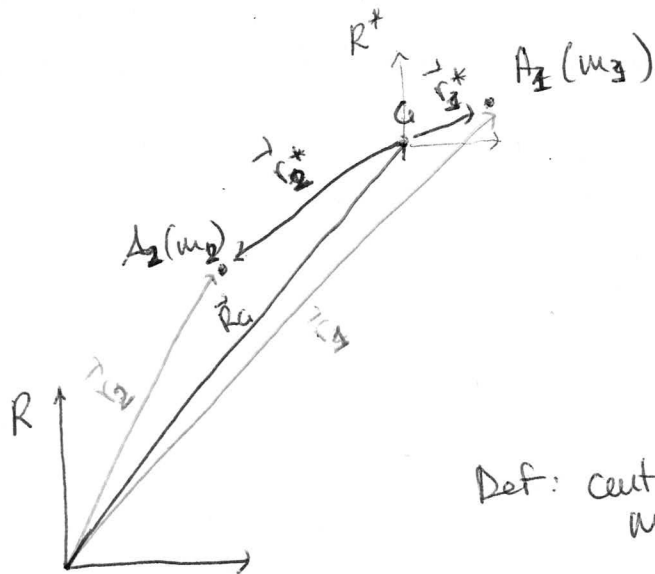
- pas de rotation
- pas de charge

= pour la terre : 8,9 mm

- " " Soleil : 2,95 km

PROBLEME A DEUX CORPS

1



$$\vec{r}_1 = \vec{OA}_1, \quad \vec{r}_2 = \vec{OA}_2$$

$$\vec{r}_1^* = \vec{GA}_1, \quad \vec{r}_2^* = \vec{GA}_2$$

$$\vec{R}_G = \vec{OG}$$

Def: centre de masse $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{R}_G$ (1)

$$m_1 \vec{r}_1^* + m_2 \vec{r}_2^* = \vec{0} \quad (2)$$

= Systeme isole $\Rightarrow R^*$ galileenne ($\vec{v}_G = \text{cte}$)

VERA pour N corps
"la somme des forces internes est nulle pour action/reaction"

$$\frac{d^2}{dt^2}(1) \Rightarrow \underbrace{m_1 \ddot{\vec{r}}_1}_{\vec{f}_{21}} + \underbrace{m_2 \ddot{\vec{r}}_2}_{\vec{f}_{12}} = (m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}}_G \quad \text{mais } \vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12} \quad (\text{action/reaction})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_G = \text{cte}$$

= Vitesse barycentrique

$$\frac{d}{dt}(1) \Rightarrow \vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)}$$

= Quantite mouvement dans R^*

$$\frac{d}{dt}(2) \Rightarrow \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0}, \quad \vec{p}_1^* = m_1 \vec{v}_1^*, \quad \vec{p}_2^* = m_2 \vec{v}_2^*$$

$$\vec{p}_1^* = m_1 \vec{v}_1^* = m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_G) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu \vec{v}$$

Energie cinetique dans R^*

$$E_k^* = E_{k1}^* + E_{k2}^* = \frac{p_1^{*2}}{2m_1} + \frac{p_2^{*2}}{2m_2} = \frac{p_1^{*2}}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu v^2$$

Equation du mouvement du systeme

2

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \vec{f}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}$$

$$(m_1 m_2)(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = (m_1 + m_2) \vec{f}$$

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{f}}$$

$$\vec{f} = -\text{grad}(U_{\text{grav}})$$

Energie totale du systeme :

$$E_{\text{AR}} = \underbrace{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v_G^2 + \frac{1}{2} \mu v^2}_{\text{KOENIG : } E_{K/R} = E_{K/G} + E_K^*} - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

$U_{\text{grav}} = \frac{\mu G (m_1 + m_2)}{r}$
↓
distance relative

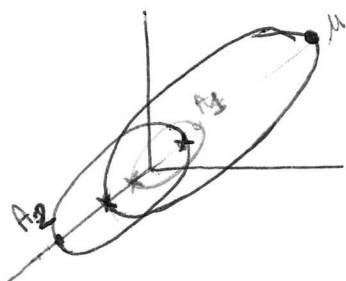
- Même symétries que pour particule en ~~force~~ champ de force newtonienne

- Pour Noether même quantité conservée

- Donc même propriété du mouvement (Loi de Kepler)

- Equation d'Euler-Lagrange : $\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$ $L = E_K - U_{\text{interaction}}(q_i)$

Mouvement particules réelles



• Mouvement équivalente à celui d'une particule fictive de masse μ située en $\vec{GA} = \vec{A_2 A_1}$, $\vec{r} = \vec{r}_1^* - \vec{r}_2^*$

$$\vec{r} = \vec{r}_1^* - \vec{r}_2^*$$

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

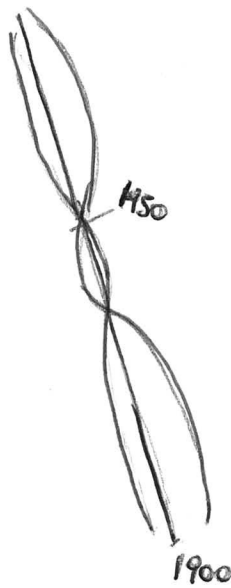
(def barycentre) $m_1 \vec{r}_1^* + m_2 \vec{r}_2^* = \vec{0}$

$$\vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

(*)

HOMOTÉSIE (*)

SIRIUS :



— Centre de gravité

SIRIUS A : étoile normale de masse $\sim 2 M_{\odot}$
que l'on voit à l'œil nu
(Canaille Flammarion, 1894 et avant)

SIRIUS B : naine blanche de masse $\sim M_{\odot}$
mais taille de la terre
visible au télescope
(initialement $\sim 6/7 M_{\odot}$)

Etoiles

Soleil $\rightarrow H \rightarrow He$ (naine blanche)

Supernova des grandios (1054)

Masse	Nucléaire	Enveloppe
$< 8 M_{\odot}$	naine blanche	géante rouge
$8-30 M_{\odot}$	Etoile neutrons	Supernovae
$> 30 M_{\odot}$	Trou noir	?