

01 - Gravitation

Énoncé des 3 lois de Kepler

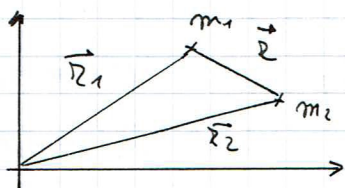
1609 - ellipse

1609 - loi des aires

1619 - loi des périodes

Newton 1687 ; Principia Mathematica

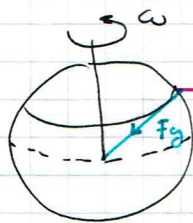
Loi de la gravitation



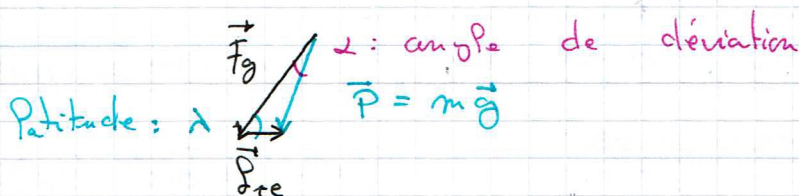
$$\vec{P}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad [N]$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^{-2}}$$

Champs de pesanteur Terrestre



Référentiel non-galiléen



$$|m \vec{g}(\lambda)| = \left[(|F_g| \cos(\lambda) - m \omega^2 R_T \cos(\lambda))^2 + (F_g \sin(\lambda))^2 \right]^{1/2}$$

avec la relation

$$\frac{\sin \alpha}{P_{de}} = \frac{\sin \lambda}{mg}$$

, on trouve α

⚠ introduit Gauss ici

11 secondes d'arc ; 11"

Réf historique : voir Pien

Manipe : pendule pesant

Principe de superposition pour le

Champs gravitationnel

à faire avant la manip



$$\vec{G}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N -G \frac{m_i}{|\vec{r}_i|^3} \vec{r}_i$$

modèle infinitésimal

$$\vec{G}(\vec{r}) = \iiint_V -\frac{G \rho_m(P)}{|\vec{r}|^3} \vec{r} d\tau_P$$

$$dm = \rho_m(P) d\tau_P$$

Analogie avec le théorème de Gauss

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_e(P) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} d\tau_P$$

$$E \rightarrow G$$

$$\rho_e \rightarrow \rho_m$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow G$$

$$\Rightarrow \oint \vec{G} d\vec{S} = -4\pi G \rho_{int}$$

Pour une symétrie sphérique $\Rightarrow \vec{G}(\vec{r}) = -G \frac{\rho_{masse} \vec{r}}{r^3}$
 $\Rightarrow$ mot d'un corp $\equiv$ mot d'un pt matériel

Force conservative

$$\vec{f} = -\text{grad } E_p(r)$$

$$E_p(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

force attractive

TMC

conservation de l'énergie mécanique

$$E_m =$$

Force centrale, conservative, indépendante du tempsForce centrale

$$\vec{f}(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$$

TMC

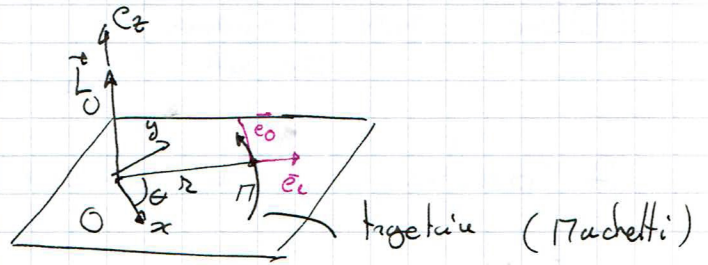
$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O(\vec{r}) = \vec{M}_O(\vec{F}) = r \vec{e}_r \wedge \vec{f}(r) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O(\vec{r}) = \text{cst} \Rightarrow \text{mot plan}$$

$$\vec{L}_0 = r \vec{e}_r \wedge m \vec{v} = r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) m$$

$$= m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = m l \vec{e}_z$$

$$l = \frac{|\vec{L}_0|}{m} = r^2 \dot{\theta} = \text{cst}$$



II

Forces conservative

$$\vec{F} = - \text{grad } E_p(r)$$

$$E_p(r) = - \frac{\alpha}{r}$$

force attractive

TEC

conservation de l'énergie mécanique

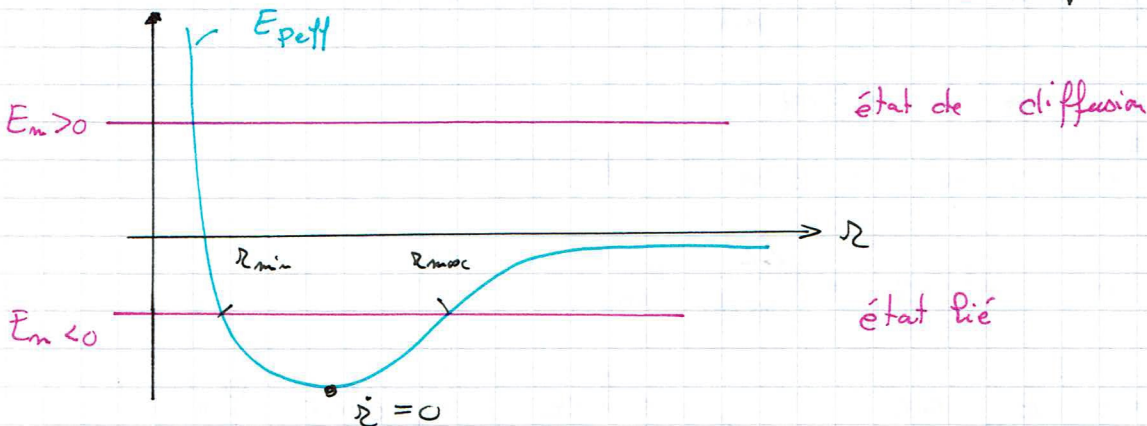
$$E_m = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)^2 + E_p$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{l^2}{r^2} + E_p(r)$$

$E_{\text{potentielle effective}} : E_{\text{peff}}$

$$E_{\text{peff}} = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$\dot{r} = \pm \sqrt{E_m - \frac{m l^2}{2 r^2} + \frac{\alpha}{r}}$$

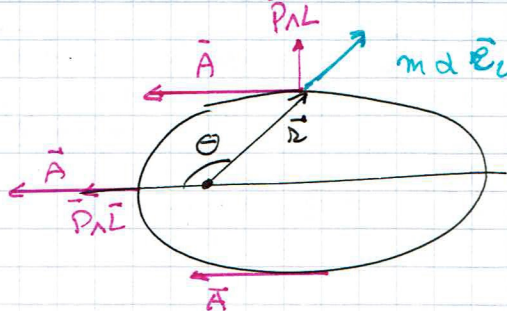


Démonstration de la loi de Kepler

Le vecteur de Runge - Lenz est
une cst du mot pour le problème de Kepler

$$\vec{A} = \vec{P} \wedge \vec{L} - m\alpha \vec{e}_c$$

(Démonstration note Stefania Marchetti)



A partir du produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{r}$, on obtient

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = A \cdot r \cos \theta = \vec{r} \cdot (\vec{P} \wedge \vec{L}) - m\alpha r$$

comme $\vec{r} \cdot (\vec{P} \wedge \vec{L}) = (\vec{r} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{L} = L \cdot L = L^2$

$$\Rightarrow A r \cos \theta = L^2 - m\alpha r \quad (1)$$

$$\Rightarrow r (A \cos \theta + m\alpha) = L^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{A \cos \theta + m\alpha}{L^2} = \frac{m\alpha}{L^2} \left(1 + \frac{A}{m\alpha} \cos \theta \right)$$

Equation d'une conique : $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta)$

$$\Rightarrow \text{excentricité } e = \frac{A}{m\alpha} = \frac{|\vec{A}|}{m\alpha}$$

$$\Rightarrow \text{semi-grand axe } p = \frac{L^2}{m\alpha} : \text{paramètre}$$

$$\text{et } e^2 - 1$$

$$\text{et } (1) |\vec{A}|^2 = m^2 \alpha^2 + 2m E_{\text{mec}} L^2$$

$$\Rightarrow e^2 - 1 = \frac{2L^2}{m\alpha^2} E_{\text{mec}}$$

$$\rightarrow e < 1 \Rightarrow E_m < 0 ; \text{ ellipse, état lié}$$

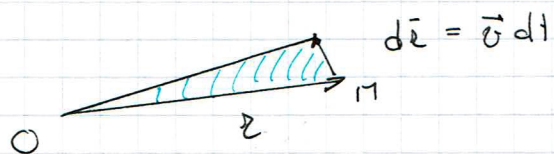
$$e = 1 \Rightarrow E_m = 0 , \text{ parabole}$$

$$e > 1 \Rightarrow E_m > 0 \text{ hyperbole, état diffusif}$$

voir slide

Démonstration 2^{ème} Loi de Kepler

5



$$d\vec{e} = \vec{v} dt$$

variation d'air : $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} dt$

vitesse angulaire

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2} \rho = \text{cst}$$

ρ : cst des aires

Démonstration de la 3^{ème} Loi de Kepler

On a $\frac{dA}{dt} = \frac{\rho}{2}$

sur une orbite elliptique (a, b) de période T

$$\frac{A}{T} = \frac{\rho}{2}$$

avec $A = \pi a \cdot b$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = \frac{\rho^2}{4}$$

Eq conique

$$2a = \frac{2\rho}{1-e^2}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow b^2 = \rho a$$

$$\Rightarrow \frac{a^3 \cdot \rho}{T^2} = \frac{\rho^2}{4\pi^2}$$

et $\rho = \frac{L^2}{m\alpha} = \frac{m^2 \rho^2}{m\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{\rho^2}{4\pi^2} \cdot \frac{\alpha}{m\rho^2} = \frac{\alpha}{4\pi^2 m} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

$$(\alpha = GM_m)$$