

19 Diffraction de Fraunhofer

7

Principe de Huygens - Fresnel

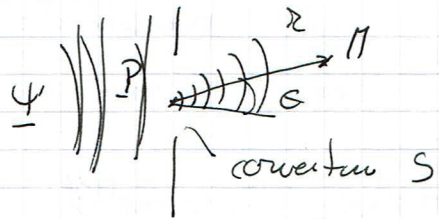
- tout pt est source secondaire, sphérique
- état vibratoire proportionnel à l'onde incidente et la surface
- Les ondes secondaires interfèrent
(Kirchhoff démontrera qu'il y a en réalité un déphasage de $\pi/2$)

⇒ Source secondaire en P

$$d\underline{\psi} = k \underline{\psi}(P) \frac{1}{2} e^{ikr} dS$$

$$\Rightarrow \underline{\psi}(M) = \iint_S d\underline{\psi}$$

$$= \iint_S k \underline{\psi}(P) \frac{1}{2} e^{ikr} dS$$



en réalité ; $k = k(\theta)$, mais Fresnel considère en premier $k = \text{cst}$

Justification: Kirchhoff propose en 1882 une explication en utilisant Maxwell

⇒ équation d'onde → eq Helmholtz

hyp: onde peu déformée modifiée
il y a à l'équation distance

conclusion: k est imaginaire pure

$$k = \frac{i}{\lambda} \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

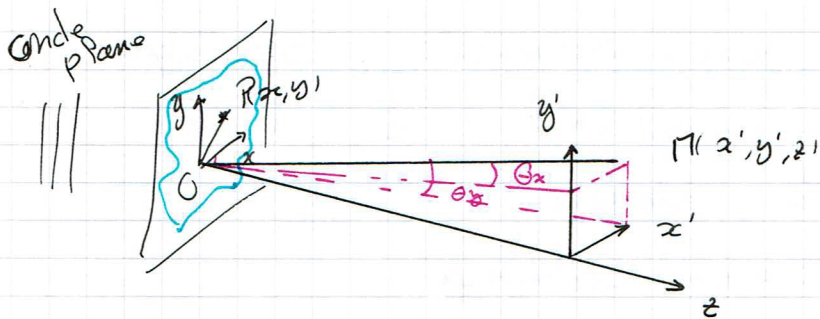
Les ondes telles secondaires sont en quadrature de phase.

⇒ Huygens - Fresnel est une bonne approximation.

$$\Rightarrow k = \frac{i}{\lambda}$$

Diffraction de Fraunhofer

2



Voie optique

Pupille $P(x, y, 0)$

on observe en $M(x', y', z)$

L'approximation de Fraunhofer

- i) paraxiale $x', y' \ll z$; ie $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est
- ii) champ lointain $z \gg x, y$

Feynman - Fresnel :
$$\underline{\Psi}(M) = \frac{i}{\lambda} \iint_S \underline{\Psi}(P) \frac{e^{+ikr}}{r} dx dy$$

$$r = PM$$

On a $\sin \theta_x = \frac{x'}{OM}$ et $\sin \theta_y = \frac{y'}{OM}$

hyp ii) $\Rightarrow 1/r \approx 1/OM$

⚠ vrai pour la distance mais pas pour la phase

On a $\vec{r} = \vec{OM} - \vec{OP} \Rightarrow r^2 = \vec{OM}^2 + \vec{OP}^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OP}$

on néglige $\vec{OP}^2 \approx 0$ $r = OM \left(1 + \frac{\vec{OP}^2}{OM^2} - 2 \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{OM^2} \right)^{1/2}$

$\Rightarrow r = \left(\vec{OM}^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OP} \right)^{1/2} = OM \left(1 - \frac{2\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{OM^2} \right)^{1/2}$

développement limité :

$$\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon$$

on néglige $\frac{\vec{OP}^2}{2OM^2}$

$$r \approx OM \left(1 - \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{OM^2} \right) = OM - \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{OM}$$

$$= OM - x \sin \theta_x - y \sin \theta_y$$

$$\Rightarrow \underline{\Psi}(M) \approx \frac{i}{\lambda} \frac{e^{+ikOM}}{OM} \iint_S \underline{\Psi}(P) e^{-ik(x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)} dx dy$$

On obtient l'intensité lumineuse avec $|\psi(r)|^2$

comme $1/z \sim 1/r = \text{cst}$

seul la valeur de l'intégrale change

$$\Rightarrow I(r) \propto \left| \iint_S \psi(P) e^{-ik(x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)} dx dy \right|^2$$

$$\Rightarrow \underline{I(x', y', z) \propto f\left(\frac{x'}{z}, \frac{y'}{z}\right)}$$

$$\sin \theta_x = \frac{x'}{z}$$

$$\sin \theta_y = \frac{y'}{z}$$

Source l'on reçoit l'écran (z), le motif subit uniquement une homothétie.

Conditions de validité de Fraunhofer

on néglige $\frac{\overline{OP}^2}{r^2}$ i.e. $\frac{\overline{OP}^2}{r^2} \ll 1 \quad \forall P \in S$

On a négligé le terme quadratique du déphasage.

Sait a la taille caractéristique de l'objet diffractant, avec $r \approx z$ (~~proportionnelle~~) (champs lointain) la condition devient

$$z \gg \frac{a^2}{\lambda}$$

Pour $\lambda = 1 \mu\text{m}$, $a = 1 \text{ cm} \Rightarrow z \gg 100 \text{ m}$

$a = 100 \mu\text{m} \Rightarrow z \gg 1 \text{ cm}$

Sous les conditions champs lointain ($z \gg \frac{a^2}{\lambda}$)

et par conséquent $\theta_x, \theta_y \ll 1$ on a

$$I(r) = \frac{1}{z^2 \lambda^2} \left| \iint_S \psi(P) e^{-ik\left(x \frac{x'}{z} + y \frac{y'}{z}\right)} dx dy \right|^2$$

$$\left(\sin \theta_x = \frac{x'}{z} \text{ et } \sin \theta_y = \frac{y'}{z} \right)$$

Transformée de Fourier

On fait le changement de variable

$$u = \frac{x'}{\lambda z} \quad \text{et} \quad v = \frac{y'}{\lambda z}$$

On obtient :

$$\Psi(u, v) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \iint_S \Psi(x, y) e^{-i2\pi(ux + vy)} dx dy$$

Transformée de Fourier

de la fct pupille $\times$ front d'onde

$\Psi(x, y)$: fct pupille : front d'onde dans l'obstacle permettant

u et v sont des fréquences spatiales

La diffraction de Fraunhofer revient à faire

la transformée de Fourier du front d'onde

sur la surface de passage.

C'est la convolution des 2 fct.

Soit $\Psi_{\text{incident}}(x, y)$ le front d'onde incident

et $P(x, y)$ la fct pupille

$$\Rightarrow \Psi(x, y) = \Psi_{\text{incident}}(x, y) \cdot P(x, y) : \text{champ transmis}$$

Donc le front d'onde diffracté est obtenu

$$\text{par } \text{TF} \{ \Psi(x, y) \}_{(u, v)} = \Psi_{\text{incident}}(u, v) * \hat{P}(u, v)$$

Diffraction dans une fente

$$\text{fente}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

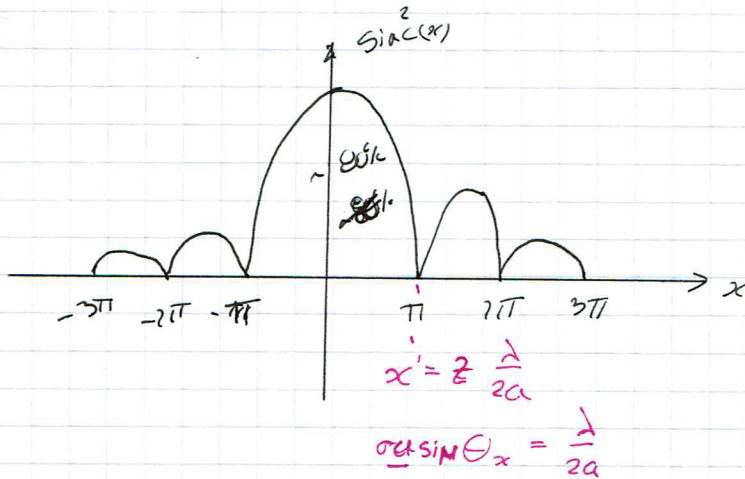
$$\text{TF} \{ \text{fente}(x) \}(u) = \int_{-a/2}^{a/2} \text{fente}(x) e^{-2i\pi ux} dx = 2a \text{sinc}(2au\pi)$$

$\Rightarrow$ pour une onde plane $\psi(x) = \psi_0$

On a $\psi = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} 2a \psi \text{sinc}(2a u \pi)$

avec u , fréquence spatiale ie $u = \frac{x'}{\lambda z}$

$\Rightarrow I = I_{\text{max}} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{2a x' \pi}{\lambda z}\right)$



Slide

$2a \lambda, x'$

Diffraction par un diaphragme circulaire



TF (diaphragme) (u, v)

Son intégrale fait intervenir les fct de Bessel

$\Rightarrow I(\theta) = I_{\text{max}} \left(\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2$ a : rayon

C'est une tache d'Airy, premier zéro à $ka \sin \theta = 1,22\pi$

$\Rightarrow$ angle de diffraction $\sin \theta \approx \theta \leq 1,22 \frac{\lambda}{2a}$

voir slide

Le critère de Rayleigh est que 2 objets sont angulairement séparés si le max de l'un est au premier annua sombre de l'autre $\Rightarrow 1,22 \frac{\lambda}{D}$