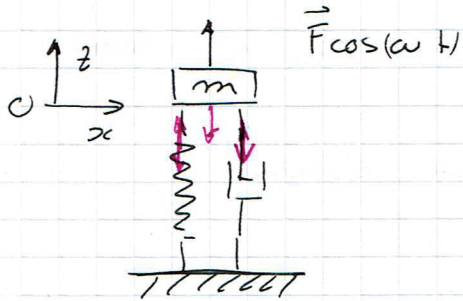


2.4 Phénomène de résonance



Système : masse, suspension, amortissement

Ref : Labu, Goldilocks

$$\vec{F}_{\text{suspension}} = -k z(t)$$

$$\vec{F}_{\text{amortissement}} = -c \dot{z}(t)$$

PFTD $\sum \vec{F} = F \cos(\omega t) - k z(t) - c \dot{z}(t) = m \ddot{z}$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{c}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{F}{m} \cos(\omega t)$$

On pose

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F}{m} \cos(\omega t)$$

forme canonique

Régime forcé, solution de la forme : $z(t) = A e^{i(\omega t + \phi)}$

$$= \underline{A} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow A e^{i\omega t} (i\omega)^2 + \underline{A} \frac{\omega_0}{Q} e^{i\omega t} (i\omega) + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = \frac{F}{m} e^{i\omega t} \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \underline{A} \left((i\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2 \right) = \frac{F}{m}$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q} - \omega^2}$$

$$m = \frac{k}{\omega_0^2}$$

$$= \frac{F}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

$$|A| = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}$$

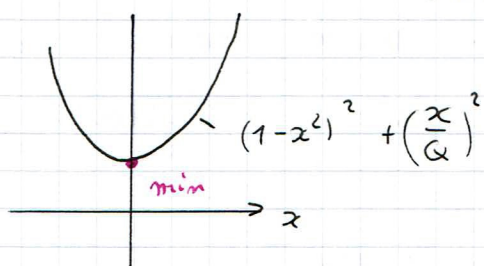
$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Résonance si $|A|$ max donc $(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$ min

dérivée = 0 $= 2(1 - x^2)(-2x) + 2 \frac{x}{Q^2} = 0$

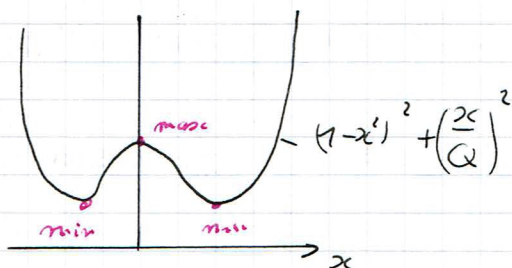
$$\Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \quad \text{ou} \quad x = 0$$

Si $Q \leq 1/\sqrt{2}$ $f' \geq 0$ $\Rightarrow |H|$ est décroissant
 $0 > x > \infty$ et $x=0$ est un max



= pas de résonance

Si $Q \geq 1/\sqrt{2}$

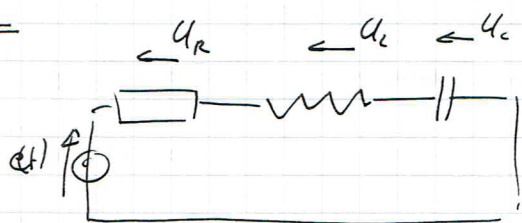


$|H|$ max pour

$$x_c = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Prégnance de résonance



Ø circuit résonnant

$$e(t) = U_R + U_L + U_C$$

$$= R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t)$$

$$= \cancel{R \frac{di(t)}{dt}} + \cancel{L \frac{d^2 i(t)}{dt^2}}$$

$$= R \frac{dq(t)}{dt} + L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} q(t)$$

$$\text{ie } \ddot{q}(t) + \frac{R}{L} \dot{q}(t) + \frac{1}{LC} q(t) = e(t)$$

$$\text{avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{L}{R} + \frac{1}{\sqrt{2}C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\cancel{\ddot{q}(t)} + \cancel{\frac{R}{L} \dot{q}(t)} \Rightarrow \ddot{q}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = e(t)$$

On exprime la puissance transférée

3

$$P_{\text{moyenne}} = \langle e(t) \cdot i(t) \rangle = \langle R i^2 + L i \frac{di}{dt} + C \frac{dU_c}{dt} \rangle$$

$$= \langle R i^2 + L i \frac{di}{dt} + U_c C \frac{dU_c}{dt} \rangle$$
$$= \langle R i^2 \rangle + L \langle i \frac{di}{dt} \rangle + C \langle U_c \frac{dU_c}{dt} \rangle$$

En régime forcé sin, on a $i(t) \propto U_c$

$$\langle U_c \frac{dU_c}{dt} \rangle \propto \langle \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \rangle = 0$$

idem pour $\langle i(t) \frac{di(t)}{dt} \rangle = 0$

$\Rightarrow$ La puissance est dissipée uniquement dans la résistance par effet Joule

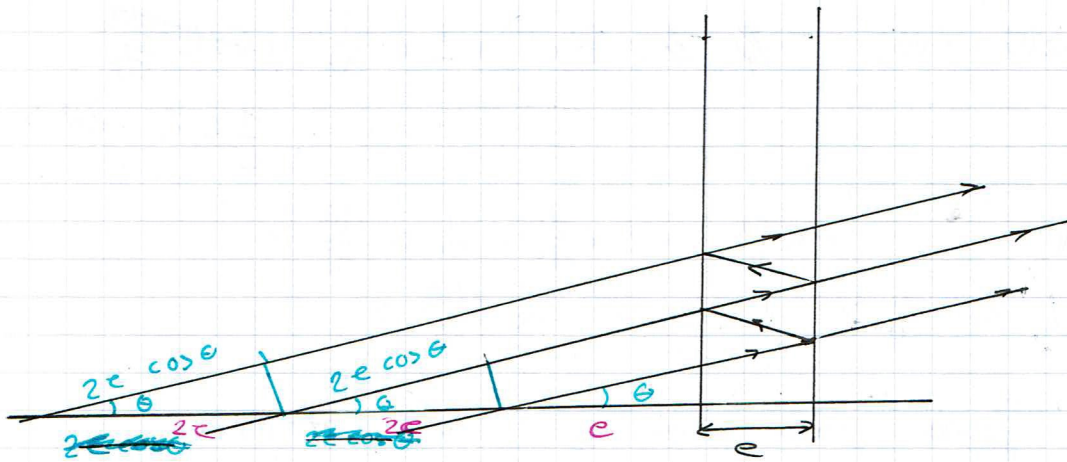
$$\Rightarrow P = \langle R i^2 \rangle$$
$$= \langle R I^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle$$
$$= \frac{R I^2}{2}$$

On obtient $i = j \omega C U_c$ et $U_c = e(t) - U_L - U_R$

$$\Rightarrow i = \frac{e}{R} \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$\Rightarrow P = \frac{E^2}{2R} \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

Il y a un max de transfert d'énergie quand il y a résonance en i ; $\omega = \omega_0$



différence de marche $\delta = 2e \cos(\theta)$