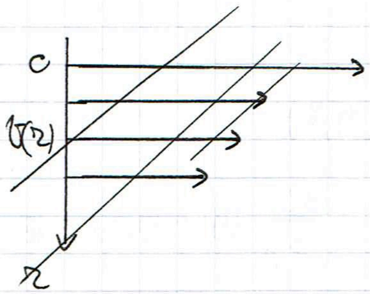
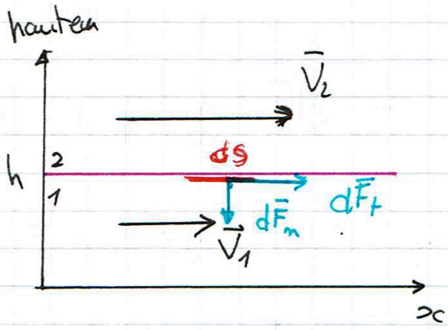
03 Notions de viscosité d'un fluide

Ecoulement visqueux.

L'expérience de la vidéo montre que le fluide est entraîné ce qui ne peut s'expliquer qu'avec une relation de proche en proche





On peut exprimer la force tangentielle $\vec{F}_t$ tq

$$d\vec{F}_t = d\vec{F}_{1\to 2} = \eta \, dS \, \frac{\partial v_x}{\partial y} \, \vec{e}_x \qquad \left(\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y} : \text{vitesse de cisaillement}\right)$$

$\Rightarrow$ la couche 2 accélère la couche 1

et la couche 1 freine la couche 2

η est la viscosité dynamique en Poiseuille : Pa.s

Cette relation défini un fluide Newtonien avec $\eta = cst$

On peut avoir $\eta = \cancel{\eta(x)} \cancel{= \eta\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y}\right)} \cancel{\eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \eta(\dot{\gamma})$

si $\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \searrow$ quand $\frac{\partial v_x}{\partial y} \nearrow$: rhéofluidifiant (sang, ...)

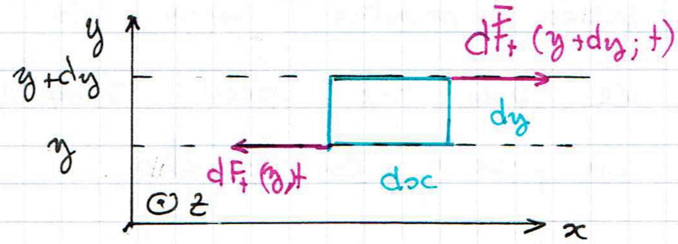
si $\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \nearrow$ quand $\frac{\partial v_x}{\partial y} \nearrow$: rhéo épaississant (amidon + eau, maïzena)

+ Comportement visco-élastique

Le fluide peut être fluide, visqueux ou complexe en fct du temps d'observation par rapport à son temps de relaxation.

Dynamique d'un écoulement visqueux

Forces volumiques dues aux contraintes visqueuses



volume $d\tau = dx\,dy\,dz$ (particule)

$$d\vec{F}_{tot} = d\vec{F}_t(y+dy,t) + d\vec{F}_t(y,t)$$

on a donc $\quad d\vec{F}_t(y+dy,t) = \eta\, dS \dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy,t)\,\vec{e}_x \qquad dS = dx\,dy$

et $\quad dF_t(y,t) = -\eta\, dS \dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\,\vec{e}_x$

$$\Rightarrow \quad d\vec{F}_{tot} = \eta\, dS \left[\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy,t) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\right]\vec{e}_x$$

$$= \eta\, dS\, dy \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\,\vec{e}_x$$

$$= \eta\, d\tau \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\,\vec{e}_x \qquad \text{et} \qquad \vec{f}_v = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\,\vec{e}_x$$

en 3D $\quad \vec{f}_v = \eta\, \Delta \vec{v}$

On rajoute ce terme à l'équation d'Euler et on trouve Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\,\vec{v}\right) = -\vec{\text{grad}}(P) + \eta\,\Delta\vec{v} + \vec{f}_{vol}$$

Ceci pour un fluide incompressible $\quad \text{div}\,\vec{v} = 0$

2 Constantes d'intégration pour p et $\vec{v}$. On les détermine à partir des conditions limites.

- continuité de v_t à travers l'interface
- continuité de v_n et donc la pression
- continuité de la contrainte tangentielle

Les termes qui compliquent la résolution de NS sont les termes convectifs (non linéaires) et le terme du second ordre.

On peut les évaluer pour justifier de les négliger.

Soit D l'échelle caractéristique du problème

$$\|\rho (\vec{v}\,\text{grad})\,\vec{v}\,\| \simeq \rho \frac{v^2}{D} \quad \text{et} \quad \|\eta \Delta \vec{v}\| \simeq \eta \frac{v}{D^2}$$

$\Rightarrow$ nbr sans dimension : Reynolds $Re = \dfrac{\text{terme convectif}}{\text{terme visqueux}} = \dfrac{\rho v D}{\eta}$

$Re \ll 1$; terme convectif négligeable
Ecoulement laminaire essentiellement visqueux

$Re \gg 1$; effets visqueux sur les bords (couche limite)
$\Longrightarrow$ Equation d'Euler

Ecoulement turbulent si Re augmente ~ $Re > 10^5$
ie mvt érratique

Ex: balle de tennis à 100 km/h $\rightarrow$ $Re \sim 10^5$

Si on néglige le terme convectif ie $Re \ll 1$

$\Rightarrow$ NS devient $\rho \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{v}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v}$ $\qquad \nu = \eta/\rho$ viscosité cinématique

On a une équation de diffusion
et le coef de diffusion est ν

$\Rightarrow$ diffusion de la qté de mouvement

+ $\tau_{diff} = L^2/\nu$ et $\tau_{conv} = L/v$ $\Rightarrow$ $Re = \dfrac{\tau_{diff}}{\tau_{convetion}}$

τ : temps caractéristique

Le viscosimètre de Couette (voir slide)

cylindre 2 : $\vec{\omega} = \omega \vec{u_z}$

cylindre 1 immobile en régime stationnaire, α_{eq}

coordonnées cylindrique

→ invariance par θ

→ invariance par translation z

$\Rightarrow \quad p = p(r) \quad$ et $\quad \vec{v} = \vec{v}(r)$

1) Fluide incompressible : $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$

en cylindrique

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial z}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{r\, v_r(r) = cst}$$

condition d'imperméabilité en $r = r_1$ $\quad v_r(r_1) = 0$

d'où $\forall r \quad r_1 v_r(r_1) = r\, v(r) = 0 \quad$ ie $\quad v_r(r) = 0 \quad \forall r$

2) NS en régime stationnaire

$$\rho\,(\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{grad}})\,\vec{v} = -\vec{\mathrm{grad}}\,p + \eta\,\Delta\vec{v} + \rho\vec{g}$$

On projette en θ

$$\rho\left(\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)v_\theta(r) = \eta\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)$$

or $\vec{v} = \vec{v}(r)$ d'où

$$0 = \eta\left(\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d v_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{d v_\theta}{d r} + \frac{v_\theta}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d v_\theta(r)}{dr} + \frac{v_\theta}{r} = Q$$

$\Rightarrow$ solution équation homogène $v_\theta' + \frac{v_\theta}{r} = 0$

$$\Rightarrow \quad v_\theta = K \cdot \frac{1}{r}$$

$\Rightarrow$ méthode de variation de la constante : $v_\theta = K(r) \cdot \frac{1}{r}$

on injecte dans l'éq diff pour trouver $K(r)$

$\Rightarrow$ solution générale $v_\theta(r) = \frac{Q r}{2} + \frac{K}{r}$

on résout avec les conditions aux limites :

Condition d'adhérence en r_1 et r_2

$v_\theta(r_1) = 0$ et $v_\theta(r_2) = \omega r_2$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$$K = -\frac{Q r_1^2}{2}$$

$$\omega r_2 = \frac{Q r_2}{2} - \frac{Q r_1^2}{2 r_2} = \frac{Q}{2}\left(r_2 - \frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{2\omega r_2}{\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2}} = \frac{2\omega r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$\Rightarrow \quad v_\theta(r) = \frac{\omega r_2^2}{r} \, \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

3) On cherche la force tangentielle du fluide sur le cylindre

$$d\vec{F}_{fluid \to 1} = \eta \left.\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=r_1} dS \, \vec{e}_\theta$$

$$= \eta \, \frac{\omega r_2^2}{r_1} \, \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left(2 r_1 - \cancel{r_1^2}\right) dS \, \vec{e}_\theta$$

⚠ fausse

$$= \frac{2 \eta \omega r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \, dS \, \vec{e}_\theta$$

et le moment exercé par la force sur l'axe Oz

$$d\Gamma = r_1 \, dF = \frac{2 \eta \omega r_2^2 r_1}{r_2^2 - r_1^2}$$

Sur l'ensemble du cylindre

$$\Gamma = \frac{4\pi \eta \omega L R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

Le moment dynamique du pendule de torsion est $C \alpha_{éq}$

$$\Rightarrow \quad \eta = \frac{C (R_2^2 - R_1^2)}{4\pi \cancel{\eta} \, \omega R_2^2 R_1^2 L} \alpha_{éq}$$

(On a négligé les effets de bords)