

EFFET TUNNEL

EFFET ONDULATOIRE

EFFET Relie à la nature ondulatoire des particules

INTRODUCTION: Imaginons de lancer une balle de tennis

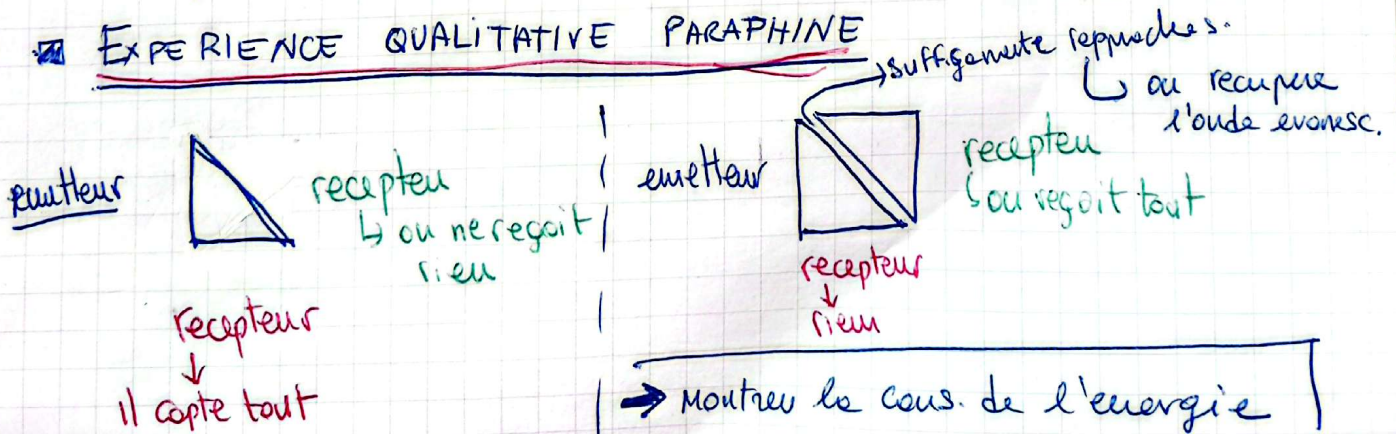
~~pour franchir un mur~~ pour surmonter un mur d'hauteur h . Si la balle n'a pas assez d'énergie pour surmonter la barrière elle ne passera pas de l'autre côté. On peut ^{en} lancer autant qu'on veut mais aucun passera de l'autre côté.

Cette constatation n'est plus vraie pour ~~les électrons~~ un faisceau d' e^- : même s'il n'ont pas l'énergie pour franchir une barrière de potentiel si les e^- sont assez nombreux, il en aura de tant en tant 1 qui arrive à passer de l'autre côté, comme si un tunnel s'est ouvert sous la barrière.

Avant d'analyser l'effet tunnel quantique et ses applications en détail c'est intéressant de remarquer que l'effet tunnel est présent dans d'autres domaines de la physique tel que l'optique (vu que ça vient de la nature ondulatoire).

On peut le montrer avec une petite expérience:

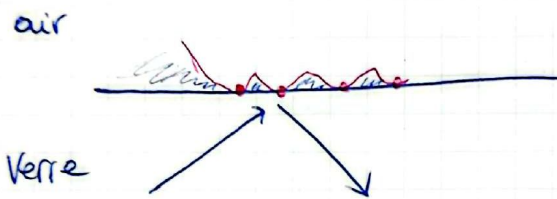
EXPERIENCE QUALITATIVE PARAPHINE



EXPERIENCE QUALITATIVE: (Effet tunnel et réflexion totale frustrée)

- C'est avec des ondes centimétriques
- On peut le faire avec un appareil qui capte l'onde récupérée en son
- On peut observer à l'oscillo

AUTRE APPLICATION: Impreuve digital



~~pas de propagation~~
ou on trouve l'air

- propagation ou on a la peau

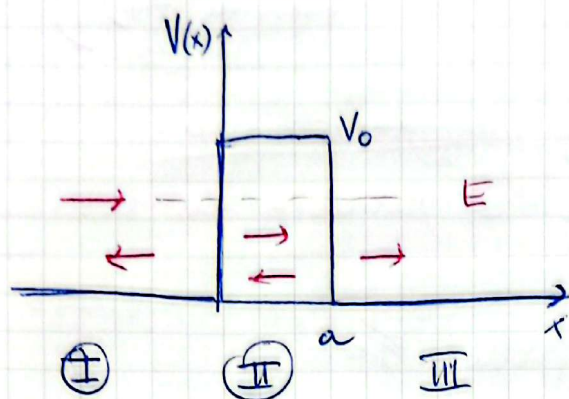
- C'est un effet tunnel car on a réapparition du phénomène ou du moins on il serait interdit

MODELE EFFET TUNNEL

- Particule modélisée par un paquet d'onde
superposition états stationnaires
- États stationnaires: $\psi(x,t) = g(t)\phi(x) \Rightarrow$
- Equation Schrodinger indépendant du temps:



MODELE EFFET TUNNEL



Energie de ma particule

$$E < V_0$$

$\Rightarrow \forall x > a$ interdit en mécanique classique

- On s'intéresse aux états stationnaires de l'Hamilton.
- OBS: Ma particule est modélisée par une paquet d'onde = superposition linéaire d'états stationnaires
- États stationnaires $\Rightarrow \psi(x,t) = g(t) \phi(x)$
 $= A e^{i/\hbar (px - Et)}$
- $\Rightarrow$ • Equation Schrödinger indépendante du temps:

$$\phi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \phi(x) = 0$$

SOLUTIONS :

$$\textcircled{\text{I}} \quad \phi_{\text{I}} = \underbrace{A e^{ikx}}_{\text{incidente } \phi_i} + \underbrace{B e^{-ikx}}_{\text{reflect } \phi_r}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad \phi_{\text{II}} = C e^{\alpha x} + D e^{-\alpha x}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

$$\textcircled{\text{III}} \quad \phi_{\text{III}} = \underbrace{F e^{ikx}}_{\text{transmise } \phi_t} + \cancel{G e^{-ikx}}$$

$$k = \dots$$

rien ~~revient~~ revient vers l'arrière

Remarque : le truc de Sarah est faux. (Composition 2015 question 77)

On s'intéresse au coefficient de transmission
(qui représente la proba de franchir la barrière)

$$T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|} \quad \text{ou rappelle } \neq$$

On rappelle $\vec{J} = \frac{-i\hbar}{2m} (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*)$

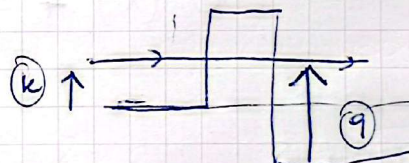
$$\equiv 2ik |\phi|^2 \quad \text{pour } \phi = e^{ikx}$$

~~Sans~~ Sans perte de généralité $A=1$
(je suis intéressé à des rapport)

~~On a~~ $\|\vec{J}_i\| = 2ik$

$$\Rightarrow T = |F|^2$$

$$\|\vec{J}_t\| = 2ik |F|^2$$



Je peut trouver les 4 coefficients B, C, D, F
en appliquant les conditions au limite (continuité):

$$\phi(0): 1 + B = C + D$$

$$\phi'(0): ik(1 - B) = \alpha(C - D)$$

$$\phi(a): Ce^{\alpha a} + De^{-\alpha a} = Fe^{ika}$$

$$\phi'(a): \alpha Ce^{\alpha a} - \alpha De^{-\alpha a} = ik Fe^{ika}$$

$$\bullet T = \frac{k}{q} |F|^2$$

• F depend aussi
de q en forme
non trivial

Si on fait les calculs on trouve :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \sinh^2(\alpha a)}$$

Approximation barrière épaisse $\alpha a \gg 1$:

$$T \approx \frac{16 E (V_0 - E)}{V_0^2} \exp(-2 \alpha a)$$

Développement

$$T = \frac{4E(V_0-E)}{4E(V_0-E) + V_0^2 \left(\frac{e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}}{2} \right)^2}$$

petit respect à $\uparrow e^{\alpha a}$

$$\approx \frac{16 E (V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2 \alpha a}$$

MONTRE INTERNET

$$T \propto \exp\left(-2 \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}} a\right)$$

$a \uparrow \quad T \downarrow$
 $V_0 \uparrow \quad T \downarrow$

SLIDE

(voir vite)

Quelques valeurs numériques : (pour des électrons)

$$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg } (\approx 10^{-30})$$

$$E = 1 \text{ eV}, V_0 = 2 \text{ eV}$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2 \cdot (10^{-30} \text{ kg}) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{10^{-34} \text{ Js}}}$$

$$\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34} \Rightarrow \hbar \sim 10^{-34} \text{ Js}$$

Js

$$= 6 \text{ nm}^{-1}$$

a (nm)	T
0,1	0,78
0,5	0,024
0,6	0,0087

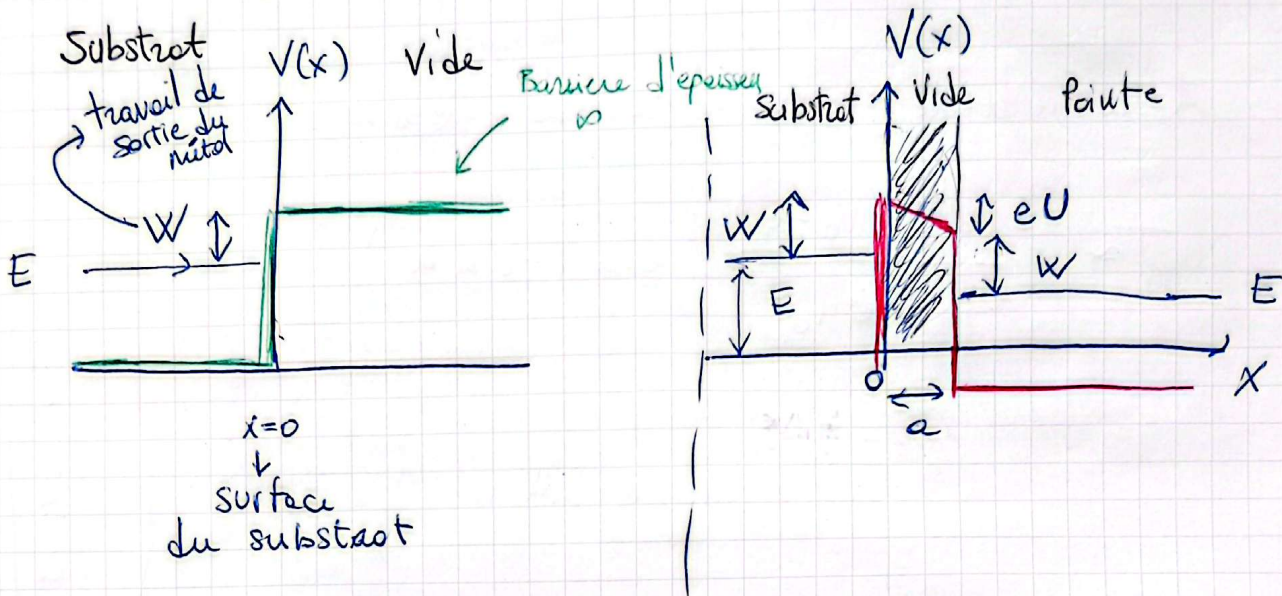
} 30%

$$a \approx 0,15 \text{ nm} \Rightarrow T \sim 1/6$$

MICROSCOPE EFFET TUNNEL

Binnig-Röher
(1980-1985)

Modélisation du paysage énergétique à la surface du métal avec et sous la pointe



W : énergie minimal pour extraire un électron du métal

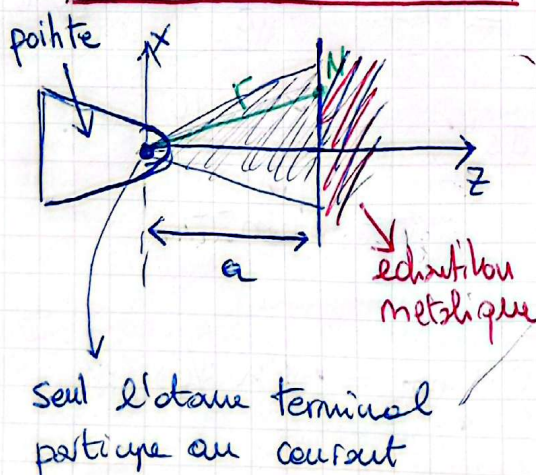
U : tension appliquée, relativement faible

→ le coefficient de transmission à travers la barrière trapézoïdale est bien approximé par:

$$T(E) \approx \frac{16 E W}{(E+W)^2} e^{-2ka} \quad k = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

$f(0)$ (TOUJOURS APPROX BARRIÈRE ÉPAISSE)

→ Résolution transversale



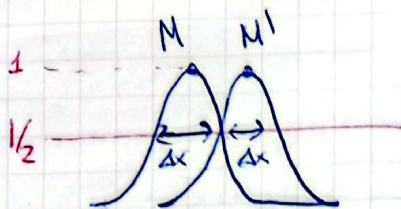
On peut montrer que le FLUX DE COURANT

$$e^{-2Ka} \approx e^{-2ka} e^{-\frac{k^2 x^2}{a}}$$

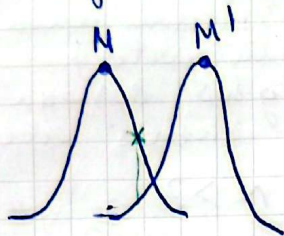


dev. limite $x \ll a$

→ Resolution transversale ⇒ Profil Gaussien



Δx = largeur à mi-hauteur



Je ne peux pas savoir si mon courant tunnel est induit par passage d'un e^- au point M ou M'

Je peux distinguer les deux points s'ils sont séparés de plus de Δx

$$e^{-\frac{k \Delta x^2}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln 2 = \frac{k \Delta x^2}{2}$$

→ ANALOGIE AVEC critère de Rayleigh.

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\ln 2 a}{k}}$$

Slit

$$a = 0,5 \text{ nm et } W = \frac{4,3 \text{ eV}}{\text{Zinc}}$$

$$\Delta x = 0,2 \text{ nm}$$

TRAVAIL EXTRACTION:

Sodium 5,14 eV
Zinc 4,3 eV

(il faut rester dans l'approximation de barrière épaisse)

→ Resolution longitudinale

$$I = C' U \frac{k}{a} e^{-2ka}$$

↓
constante

$$dI \propto \left(-\frac{1}{a^2} - 2k\right) e^{-ka} da$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{da}{a} (1 + 2ka)$$

On peut distinguer $\Delta I \approx 2I$

$$\Rightarrow \Delta a \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h^2}{2mW}} \frac{\Delta I}{I} \approx 1 \text{ pm}$$

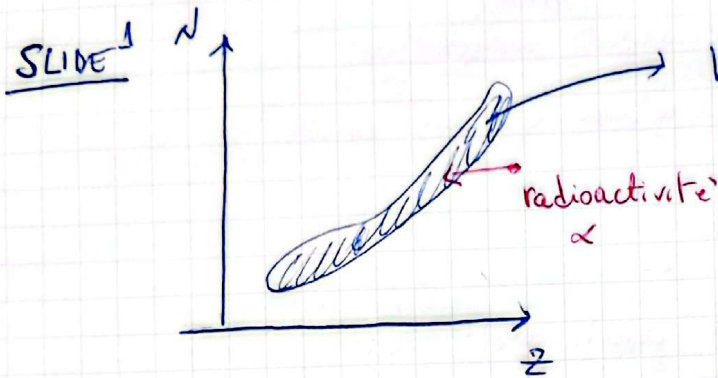
Pointe contrôlée par des actionneur piézoélectrique

$$k \text{ grande} \Rightarrow -2k da$$

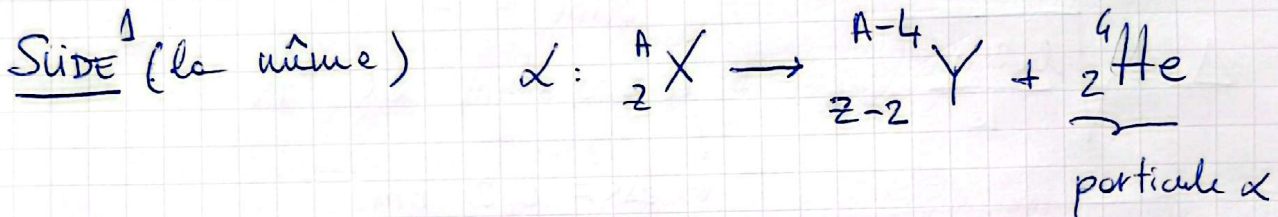
signe - : I décroît quand a augmente

Pour le même $W \Rightarrow \Delta a \approx 1 \text{ pm}$
(k est fonction univ. de W)

RADIOACTIVITÉ α (• juste donner les grandes lignes sur slides)

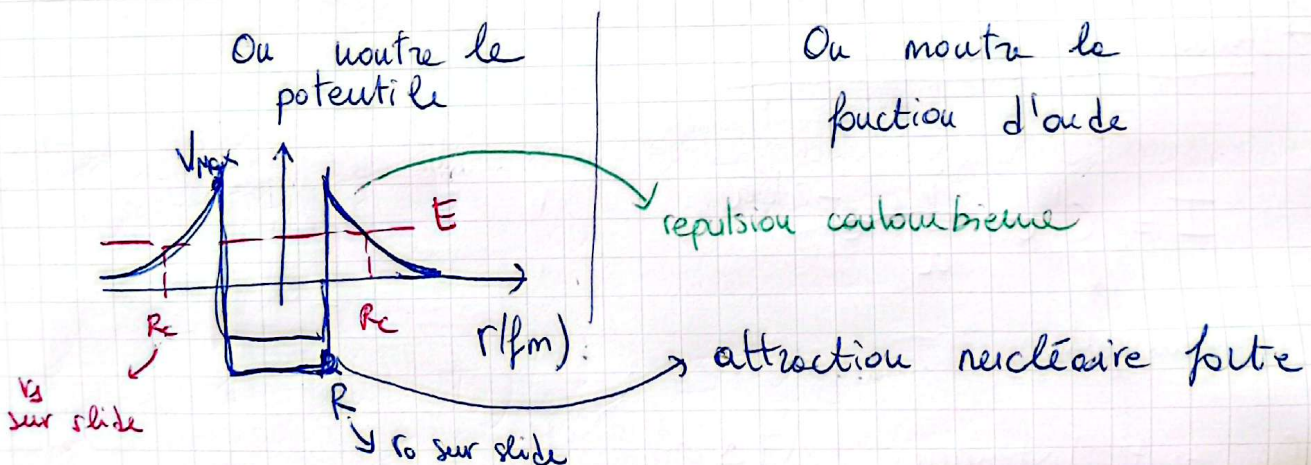


ETRE AU POINT SUR LE MODELE DE LA GOUTTE LIQUIDE



SLIDE 2 : Modèle de Gamow :

la particule préexiste :



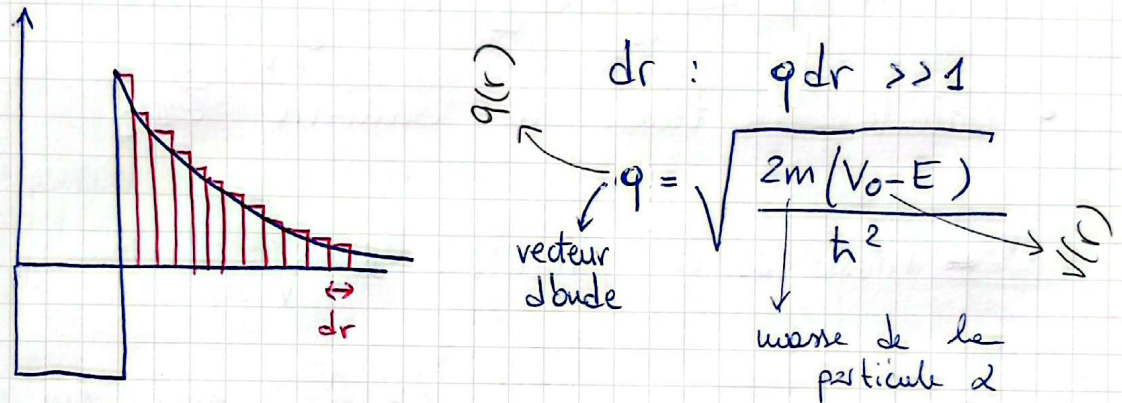
- R : on l'estime à partir du rayon de noyaux et de A (sphère compacte)
- E : on mesure l'énergie des particules α ?
ODh : quelque MeV, à partir de approx 7 MeV $\Rightarrow$ instable

• Potentiel coulombien $V(r) = \frac{ze (z-2)e}{4\pi\epsilon_0 r}$ ^{charge du reste}

charge de la particule α
qui est un noyau d'He

• $V_{\text{MAX}} = V(R)$, $V(R_c) = E \Rightarrow R_c$

• On décompose une barrière coulombienne en petit
barrière de potentiel rectangulaire d'épaisseur dr



$\Rightarrow dr$ tel que je peux faire l'approximation de
barrière épaisse sur chaque $\square$

• Approx barrière épaisse

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2qa} \quad , \quad \ln T \approx -2qa$$

~ 1 $\gg 1$ dr

$T = \prod_i T_i$ avec T_i correspondant à chaque $\square$

• On trouve donc :

$$\ln T = -2 \int_R^{R_c} q(r) dr \quad \text{avec} \quad q(r) = \sqrt{\frac{2m(V(r) - E)}{\hbar^2}}$$

Après calcul (LP 41 - Effet-tunnel, Goerlinger - Faure)

$$\ln(T) = \underbrace{\frac{4e}{\hbar} \sqrt{\frac{m z'}{\pi \epsilon_0}} \sqrt{R}}_a - \underbrace{\frac{z e^2}{\hbar \epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{z}} \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}}_{b/\sqrt{E}} \quad z' = (z-2)$$

• Calcul du temps de demi-vie $\tau_{1/2}$

▀ vitesse de la particule α : $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

▀ fréquence de chocs $f = \frac{v}{2R}$ avec les proba du petit

▀ Proba de franchir la barrière à chaque
chaque T (que je viens de calculer)

▀ Proba de franchir la barrière en temps dt
($1 - p(0)$) ne pas la franchir

$$1 - (1 - T)^{f dt} \simeq T f dt \quad (1-x)^2 \simeq 2x \quad \text{si } x \ll 1$$

▀ Pour N noyaux

$$dN = -N f T dt$$

temps de demi-vie

$$Z_{1/2} = \frac{\ln(2)^{\text{deux}}}{\lambda}$$

$$\lambda = f T$$

coefficient de transmission
fréquence des chocs

$$\Rightarrow \ln Z_{1/2} = \ln\left(\frac{\ln(2)}{f}\right) - \ln T$$

On retrouve la loi de Geiger-Nuttall

$$\ln Z_{1/2} = a + \frac{b}{\sqrt{E}}$$

OBS : ^{VERSION DE GAMOW} Approche simpliste, on dit que $qdr \gg 1$ mais
pour intégrer il faut $dr \rightarrow 0$

• Pour bien faire le calcul il faut utiliser l'approximation WKB, qui s'applique quand le potentiel varie lentement

• Δ à 9 MeV la particule est relativiste

CONCLUSION :

• Effet tunnel : analogie formelle avec l'effet peau en optique

• Effet tunnel quantique : possibilité de "tunneler"
(description ond. vs description classique)
↓
Compare $\lambda = \frac{h}{p}$ de Broglie à la taille de la particule (ou de la barrière)

• Classique VS Quantique :

λ grande : la particule se comporte comme une onde

λ petite : description classique, effet tunnel négligeable

- Dans la barrière j'ai une onde évanescente
- Elle est de la forme e^{-kx} et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Si λ est petit à la fin de la barrière $e^{-2\pi \frac{a}{\lambda}}$ est mort et je n'ai aucune chance de sortir. Si a/λ petit je peux "tunneler"

ODG (voir chatGPT)

Particule	m (kg)	v (m/s)	λ (m)	Tunnel
e^-	$\sim 10^{-30}$	1000	$\sim 10^{-9}$	✓✓
p	$\sim 10^{-27}$	1000	$\sim 10^{-12}$	✓
H ₂	$\sim 3 \cdot 10^{-27}$	100	$\sim 10^{-11}$	?
Balle tennis	0,1	10	$\sim 10^{-34}$	X

- Applications → Microscopie
→ Radioactivité α

- Autres applications → Retournement moléculaire
~~avec~~ ammoniac NH₃

⚠ être au point

(à la base de Morse)

→ Réaction redox : passage e^- du métal de l'électrode à un atome en solution