Oscillateurs, portraits de phase et non-linéarités

Plan de la présentation

Prérequis

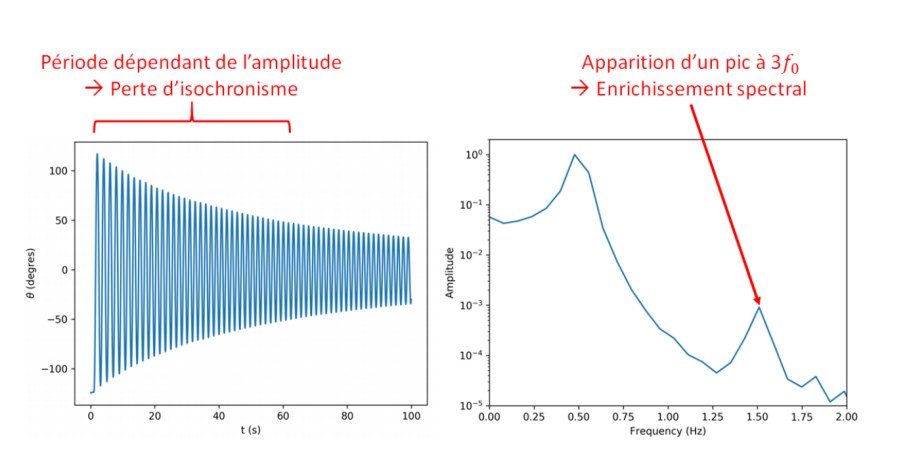
- Mécanique du point
- Plan de phase
- Électrocinétique
- Oscillateurs linéaires

Sommaire

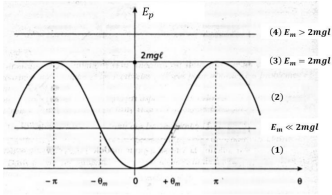
- Portrait de phase de l'oscillateur harmonique
- Portrait de phase de l'oscillateur amorti
- Non linéarités du pendule simple: formule de Borda, portrait de phase
- Oscillateur de Van der Pol: régime quasi-sinusoïdal, oscillateur à relaxation
- Modèles neuronaux inspirés de Van der Pol
- Résumé et conclusions

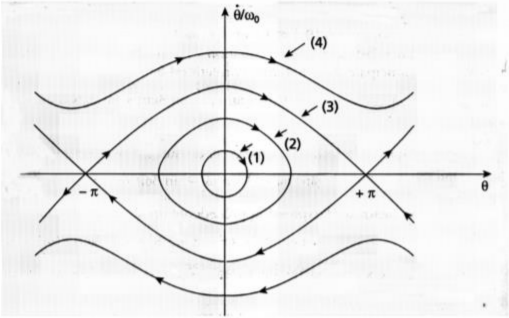
Non linéarités du pendule simple

- Perte d'isochronisme
- Enrichissement spectral



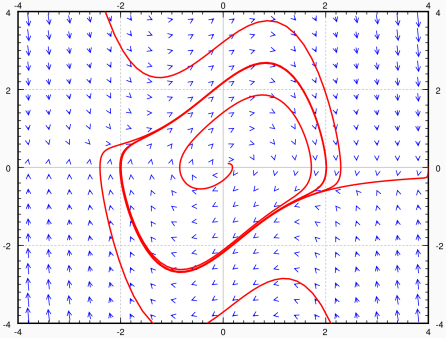
Non linéarités du pendule simple: portrait de phase

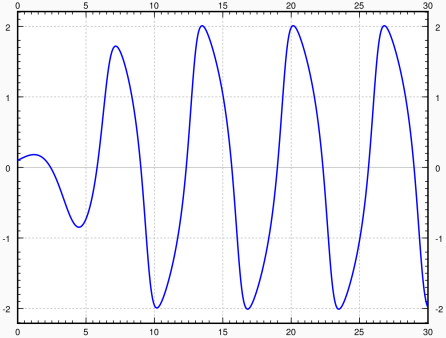




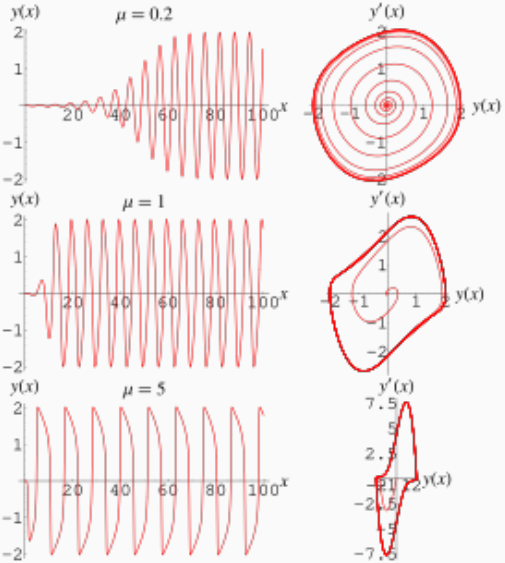
- (1) : Oscillations sinusoïdales
- (2) : Oscillations: perte de l'isochronisme
- (3) : Séparatrice hetherocline
- (4) : Rotations

Oscillateur de Van der Pol: cycle limite

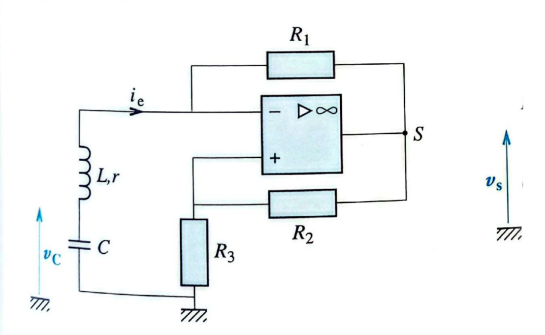




Oscillateur de Van der Pol: différents régimes



Oscillateur à résistance négative



Modèles neuronaux inspirés de Van der Pol: Modèle de FitzHugh–Nagumo

Un neurone reçoit des signaux (courants), et lorsqu'un certain **seuil** est atteint, il déclenche un **potentiel d'action** (ou *spike*), puis entre dans une **phase réfractaire** avant de recommencer.

Ce comportement est typique d'un **oscillateur à relaxation** :

- montée lente $\rightarrow$ excitation
- décharge brutale $\rightarrow$ spike
- retour lent au repos

Modèle de FitzHugh–Nagumo

Système à deux variables qui capte l'essentiel du comportement d'un neurone :

$$\begin{cases} \dot{v} = v - \frac{v^3}{3} - w + I \\ \dot{w} = \varepsilon(v + a - bw) \end{cases}$$

où :

- v : potentiel membranaire
- w : variable de récupération (courant sortant)
- I : courant d'entrée
- $\varepsilon \ll 1$: séparation des temps

Modèle de FitzHugh–Nagumo

Système à deux variables qui capte l'essentiel du comportement d'un neurone :

$$\begin{cases} \dot{v} = v - \frac{v^3}{3} - w + I \\ \dot{w} = \varepsilon(v + a - bw) \end{cases}$$

où :

- v : potentiel membranaire
- w : variable de récupération (courant sortant)
- I : courant d'entrée
- $\varepsilon \ll 1$: séparation des temps

Comportement du système

- Si I est faible $\rightarrow$ le système reste au repos (point fixe stable)
- Si I dépasse un seuil $\rightarrow$ oscillations auto-entretenues $\Rightarrow$ spiking régulier

Résumé et conclusions

L'analyse par **portrait de phase** est un outil fondamental pour étudier les systèmes dynamiques, en particulier non linéaires. Elle permet :

- de visualiser l'évolution des trajectoires dans le plan des phases ;
- d'identifier les **points fixes** et d'analyser leur **stabilité** ;
- de détecter l'apparition de **cycles limites** et leur structure ;
- d'observer différents types de **bifurcations** (de Hopf, de point fixe, de saut, etc.) ;
- de suivre des changements qualitatifs comme la **variation de l'amplitude moyenne des oscillations**

Résumé et conclusions

L'analyse par **portrait de phase** est un outil fondamental pour étudier les systèmes dynamiques, en particulier non linéaires. Elle permet :

- de visualiser l'évolution des trajectoires dans le plan des phases ;
- d'identifier les **points fixes** et d'analyser leur **stabilité** ;
- de détecter l'apparition de **cycles limites** et leur structure ;
- d'observer différents types de **bifurcations** (de Hopf, de point fixe, de saut, etc.) ;
- de suivre des changements qualitatifs comme la **variation de l'amplitude moyenne des oscillations**

En dimension trois ou plus, les systèmes dynamiques deviennent encore plus riches. On peut y observer des phénomènes complexes tels que :

- la **chaoticité déterministe**,
- et des structures fractales dans les attracteurs (ex. : attracteur de Lorenz).